

Bài 5: Dấu của tam thức bậc hai

I. Định lý về dấu của tam thức bậc hai

1. Tam thức bậc hai

a) Định nghĩa:

Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những số đã cho, $a \neq 0$

b) Ví dụ: $f(x) = x^2 - 5x + 4$
 $g(x) = x^2 - 4$
 $h(x) = 3x + 2x^2$

$f(x) = 2x - 5$

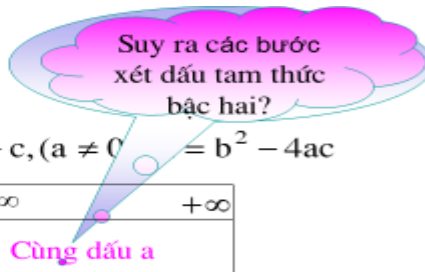
c) **Chú ý:** Nghiệm của phương trình: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$
 cũng được gọi là nghiệm của tam thức $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$

DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

	$a > 0$	$a < 0$	Dấu $f(x)$
$\Delta < 0$			$f(x)$ cùng dấu với $a, \forall x \in \mathbb{R}$
$\Delta = 0$			$f(x)$ cùng dấu với a , với $\forall x \neq -\frac{b}{2a}$
$\Delta > 0$			* $f(x)$ cùng dấu với a , $\forall x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ * $f(x)$ trái dấu với a , $\forall x \in (x_1, x_2)$

2. Dấu của tam thức bậc hai

a) Định lý: (SGK)



b) Bảng xét dấu: $f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0) \quad \Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta < 0$: pt $f(x) = 0$ VN

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	Cùng dấu a		

$\Delta = 0$: pt $f(x) = 0$ có nghiệm kép $x = -\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	Cùng dấu a	0	Cùng dấu a

$\Delta > 0$, $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
f(x)	Cùng dấu a	0	Trái dấu a	0	Cùng dấu a

Ví dụ 2: Lập bảng xét dấu các tam thức

a) $f(x) = x^2 - 4$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
f(x)	+	0	-	0	+

$\Rightarrow f(x) > 0$ với $\forall x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

$f(x) < 0$ với $\forall x \in (-2; 2)$

$f(x) = 0$ với $x = -2$; $x = 2$

b) $g(x) = -x^2 - 3x + 4$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
g(x)	-	0	+	0	-

$\Rightarrow f(x) < 0$ với $\forall x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

$f(x) > 0$ với $\forall x \in (-4; 1)$

$f(x) = 0$ với $x = -4$; $x = 1$

Cách 2. Lấy dấu của 2 hệ số a nhân lại với nhau ra dấu hệ số A của f(x). Rồi áp dụng theo quy tắc đan xen dấu: Phải (ngoài) cùng, Qua nghiệm đơn(bội lẻ) đổi dấu, qua nghiệm kép(bội chẵn) không đổi dấu.

Cho $4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = -2$ ($a = -1 < 0$)

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -5$ ($a = 1 > 0$)

BXD : A < 0

x	$-\infty$	-5	-2	1	2	$+\infty$			
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-

Vậy $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -5) \cup (-2; 1) \cup (2; +\infty)$

$f(x) > 0$ khi $x \in (-5; -2) \cup (1; 2)$

$f(x) = 0$ khi $x = -5; x = -2; x = 1; x = 2$

$$b) g(x) = \frac{(-3x^2 + 3x - 1)(2x - 4)}{x^2 + 3x}$$

Ta có : $-3x^2 + 3x - 1 = 0$ vô nghiệm

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -3, x = 0$$

Lập bảng xét dấu

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
$-3x^2 + 3x - 1$	—	—	—	—	—
$2x - 4$	—	—	—	0	+
$x^2 + 3x$	+	0	—	0	+
g(x)	+		—		+

$$f(x) > 0 \text{ với } \forall x \in (-\infty; -3) \cup (0; 2)$$

$$f(x) < 0 \text{ với } \forall x \in (-3; 0) \cup (2; +\infty)$$

$$f(x) = 0 \text{ với } x = 2$$

$$f(x) \text{ không xác định khi } x = -3; x = 0.$$

Cách 2.

Cho $-3x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow PTVN$ ($a = -3 < 0$)

$$2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad (a = 2 > 0)$$

$$x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = -3; x = 0 \quad (a = 1 > 0)$$

BXD (có $A < 0$)

x	$-\infty$	-3	0	2	$+\infty$
f(x)	+		-		+

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -3) \cup (0, 2)$ $f(x) = 0$ khi $x = 2$

$$f(x) < 0 \text{ khi } x \in (-3, 0) \cup (2; +\infty) \quad f(x) \text{ không xác định khi } x = -3, x = 0$$

Lưu ý: +) Cũng tương tự như dấu của nhị thức bậc nhất, thông thường ta hay sử dụng cách thứ 2 để xét dấu f(x).

+) **Quy tắc:** Tìm dấu hệ số A của f(x) bằng cách lấy tất cả các dấu của hệ số a của các nhị thức, tam thức ta nhân lại với nhau. **Rồi áp dụng** theo quy tắc “**Đan xen dấu:** Phải(ngoài) cùng dấu với A, qua nghiệm **đơn (bội lẻ)** đổi dấu, qua nghiệm **kép (bội chẵn)** không đổi dấu”. Nghiệm ở dưới mẫu làm cho f(x) không xác định ta dùng ||.

BÀI TẬP ÁP DỤNG 1

Bài 1. Xét dấu các tam thức sau :

a) $f(x) = x^2 + x - 42$

b) $g(x) = -2x^2 + 3x + 2$

c) $h(x) = 4x^2 - 20x + 25$

d) $k(x) = -5x^2 + 4x - 7$

Bài 2. Xét dấu các biểu thức sau.

a) $f(x) = \frac{(7-4x)(x^2+x-2)}{2x^2-3x+2}$

b) $f(x) = \frac{(25-x^2)(x^2-6x+9)}{-x^2-2x+8}$

c) $f(x) = \frac{(3-x)(x^2-4x-12)}{\sqrt{6x^2-3x+\sqrt{2}}}$

d) $f(x) = \frac{(2x^2-x-1)(3x^2-4x)}{x^2-10x+25}$

e) $f(x) = \frac{2x-5}{x^2-6x-7} - \frac{1}{x-3}$

f) $f(x) = \frac{(2-x)^3(x^2-4x+4)(3-x)^4}{(x-1)^7(4-x)^3}$

II. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp giải:

+B1) Biến đổi (nếu cần) đưa VP = 0, VT = tích thương các NTB, TTB. Tìm nghiệm các NTB, TTB

+) B2: Lập bảng xét dấu về trái bpt (Làm tương tự như xét dấu biểu thức)

+) B3: Kết luận theo yêu cầu bpt

Ví dụ : Giải các bất phương trình sau:

$$a) (x^2 - 4x + 4)(-3x^2 - x + 4) < 0$$

$$b) \frac{(3-2x)(2x^2-5x+2)}{(x^2-6x+9)(x^2+x+7)} \leq 0$$

$$c) \frac{1}{x-2} \geq \frac{2x-3}{x^2-5x+6}$$

$$d) \frac{(3-x)^5(x^2-6x+9)(2-x)^2}{(x-1)^5(5-x)^7} < 0$$

Giải

$$a) (x^2 - 4x + 4)(-3x^2 - x + 4) < 0$$

$$\text{Cho } x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (Nghiệm kép)} \quad (a=1>0)$$

$$-3x^2 - x + 4 \Leftrightarrow x = 1; x = -4/3 \quad (a=-3<0)$$

BXD A<0

x	$-\infty$	$-4/3$	1	2	$+\infty$
VT	-	0	+	0	-

$$\text{Vậy } S = (-\infty; -4/3) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$b) \frac{(3-2x)(2x^2-5x+2)}{(x^2-6x+9)(x^2+x+7)} \leq 0$$

$$\text{Cho } 3-2x = 0 \Leftrightarrow x = 3/2 \quad (a=-2<0)$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2; x = 1/2 \quad (a=2>0)$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ (Nghiệm kép)} \quad (a=1>0)$$

$$x^2 + x + 7 = 0 \Leftrightarrow \text{PTVN} \quad (a=1>0)$$

BXD A<0

x	$-\infty$	1/2	3/2	2	3	$+\infty$
VT	+	0	-	0	+	-

$$\text{Vậy } S = [1/2; 3/2] \cup [2; 3) \cup (3; +\infty)$$

$$c) \frac{1}{x-2} \geq \frac{2x-3}{x^2-5x+6} \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{2x-3}{x^2-5x+6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6-(2x-3)(x-2)}{(x-2)(x^2-5x+6)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+6-(2x^2-4x-3x+6)}{(x-2)(x^2-5x+6)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+2x}{(x-2)(x^2-5x+6)} \geq 0$$

Cho $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=2; x=0$ ($a=-1<0$)

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ ($a=1>0$)

$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2; x=3$ ($a=1>0$)

BXD $A<0$ ($x=2$ xuất hiện 3 lần $\Rightarrow$ nghiệm bội lẻ)

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$		
VT	+	0	-		+		-

Vậy $S = (-\infty; 0] \cup (2; 3)$

$$d) \frac{(3-x)^5(x^2-6x+9)(2-x)^2}{(x-1)^5(5-x)^7} < 0$$

Cho $(3-x)^5 \Leftrightarrow 3-x=0 \Leftrightarrow x=3$ (nghiệm bội 5) ($a<0$) $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow x=3$ là nghiệm bội 7

$x^2-6x+9=0 \Leftrightarrow x=3$ (Nghiệm kép) ($a>0$)

$(2-x)^2 \Leftrightarrow 2-x=0 \Leftrightarrow x=2$ (Nghiệm kép) ($a>0$)

$(x-1)^5 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ (nghiệm bội 5) ($a>0$)

$(5-x)^7 \Leftrightarrow 5-x=0 \Leftrightarrow x=5$ (nghiệm bội 7) ($a<0$)

BXD $A>0$

x	$-\infty$	1	2	3	5	$+\infty$			
VT	-		+	0	+	0	-		+

Vậy $S = (-\infty; 1) \cup (3; 5)$

BÀI TẬP ỨNG DỤNG 2

1) $(5-2x)(3x^2-10x+3) \geq 0$

2) $(x^2-4x+4)(-3x^2-x+4) < 0$

3) $\frac{(2-x)(x^2+3x+9)}{x^2-5x+6} \leq 0$

4) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} \leq \frac{1}{x-3}$

5) $\frac{(2x^2-x-1)(3x^2-5x)}{x^2-10x+25} \leq 0$

6) $\frac{2}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-1}{x^3+1}$

7) $\frac{(2x-3)(\sqrt{3}x^2-6x+20)}{x^2-5x+6} \leq 0$

8) $\frac{x^2-5x+1}{2-3x} \leq x-2$

9) $\frac{(x^2-8x+15)(-x^2-3x-10)}{16-x^2} > 0$

10) $\frac{4-x}{x-5} \geq \frac{1}{1-x}$

11) $(x^3-8)(-x^2+5x-6) \geq 0$

12) $(x^2+4x-12)(\sqrt{6}x^3+3x^2+\sqrt{7}x) < 0$

13) $\frac{(x^3+1)(-x^2+5x+6)}{(2-x)(3x^2-12)} \leq 0$

14) $\frac{1}{3x-x^2-2} \geq \frac{3}{7x-4-3x^2}$

III. GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Phương pháp: *Thông thường ta giải hệ gồm 2 bpt:* $\left\{ \begin{array}{l} \text{bpt (1)} \Rightarrow S_1 \\ \text{bpt (2)} \Rightarrow S_2 \end{array} \right\} \Rightarrow S = S_1 \cap S_2$

Ví dụ: Giải hệ bpt sau: $\left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 6x + 5)(x - 4) < 0 \quad (1) \\ \frac{(3 - x)(x^2 + 3x + 9)}{x^2 - 2x + 1} \geq 0 \quad (2) \end{array} \right.$

Giải (1): Cho $x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 2$

$$x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

BXD $A > 0$

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$
VT	-	0	+	0	+

$$\Rightarrow S_1 = (-\infty; 2) \cup (3; 4)$$

Giải (2): Cho $3 - x = 0 \Leftrightarrow x = 3; x^2 + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow PTVN$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (Nghiem kép)}$$

BXD $A < 0$

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
VT	+		0	-

$$\Rightarrow S_2 = (-\infty; 1) \cup (1; 3]$$

$$\text{Vậy } S = S_1 \cap S_2 = (-\infty; 1) \cup (1; 2)$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG 3

$$1) \left\{ \begin{array}{l} (2x+3)(x^2-4) < 0 \\ \frac{(2x-4)(x^2-3x)}{x-1} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} (2x+1)(5-2x^2) \leq 0 \\ \frac{(3x+4)(x^2+2x+7)}{2-x} > 0 \end{array} \right.$$

$$5) \left\{ \begin{array}{l} (2x-x^2)(2x^2+2x+5) \geq 0 \\ \frac{(x^2-6x+9)(1-x)}{(x-4)} < 0 \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} (x^2-5x+6)(x-1) < 0 \\ \frac{(2-3x)(x^2+2x+5)}{x} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$4) \left\{ \begin{array}{l} (x^2+1)(x-4) < 0 \\ \frac{-2x^2+x-6}{(2x-1)(x-3)} \geq 0 \end{array} \right.$$

$$6) \left\{ \begin{array}{l} (x^2-8x+16)(3-x) < 0 \\ \frac{(x+1)(x^2+2x+5)}{x-1} \geq 0 \end{array} \right.$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP:

Bài 5. Dấu của tam thức bậc 2 (Bài 1 $\rightarrow$ Bài 3) trong Đề Cương trang 17